

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр
Сибирского отделения Российской академии наук»
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)**

УТВЕРЖДАЮ:

Директор ФИЦ КНЦ СО РАН

 А.А. Шпедт

«25» *января* 2022г.



**ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

«Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная специальность:

1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Отрасль наук:

физико-математические науки

Красноярск 2022

1 Общие положения

Программа кандидатского экзамена разработана на кафедре фундаментальных дисциплин и методологии науки факультета подготовки кадров ФИЦ КНЦ СО РАН в соответствии со следующими документами:

- Приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 20 октября 2021 г. №951 «Об утверждении федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов)»;
- Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней»;
- Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре ФИЦ КНЦ СО РАН;
- Порядком сдачи кандидатских экзаменов и прикрепления лиц к ФИЦ КНЦ СО РАН для сдачи кандидатских экзаменов;
- Паспортом научной специальности.

Цель проведения экзамена: оценить уровень знаний, умений и навыков в области дифференциальных уравнений и математической физики.

Экзамен по специальной дисциплине должен выявить уровень теоретической и профессиональной подготовки экзаменуемого, знание общих концепций и методологических вопросов данной науки, истории ее формирования и развития, фактического материала, основных теоретических и практических проблем данной отрасли знаний.

К кандидатскому экзамену допускаются лица, прикрепленные к ФИЦ КНЦ СО РАН для сдачи кандидатских экзаменов без освоения программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, и аспиранты, обучающиеся в ФИЦ КНЦ СО РАН по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (далее – экзаменуемые).

Кандидатский экзамен по дисциплине «Дифференциальные уравнения и математическая физика» проводится по билетам. Экзаменационный билет включает в себя три теоретических вопроса по данной научной специальности и отрасли науки, по которой подготавливается или подготовлена диссертация.

2 Содержание программы кандидатского экзамена

Теоремы существования и единственности.

Теорема Коши – Пикара о существовании глобального решения. Локальная теорема Коши – Пикара. Теорема существования и единственности для нормальных линейных систем. Сведение уравнений n -го порядка к нормальной системе. Теорема существования и единственности для уравнений n -го порядка.

Теоремы о свойствах решений.

Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных. Существование и единственность непродолжаемых решений. Теорема о свойствах непродолжаемых решений. Теорема о свойствах непродолжаемых решений для автономных систем. Устойчивость по Ляпунову.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами.

Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант

Обобщенные функции и действия над ними.

Дифференцирование обобщенных функций. Замена переменных в обобщенных функциях. Носитель обобщенных функций. Сингулярный носитель обобщенных функций. Свертка обобщенных функций. Граничные значения аналитических функций. Пространство умеренных распределений

Фундаментальные решения дифференциальных уравнений.

Фундаментальные решения. Примеры фундаментальных решений. Распространение волн. Построение фундаментальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о среднем.

Уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве.

Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве. Классификация уравнений в полупространстве. Примеры уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.).

Краевые задачи.

Неоднородные уравнения в полупространстве. Краевые задачи для неоднородных уравнений

Пространства Соболева W_p^m .

Теоремы вложения, следы функций из W_p^m на границе области.

Псевдо-дифференциальные операторы.

Определение, свойства, область применения

Нелинейные гиперболические уравнения.

Определение, свойства, область применения

Монотонные нелинейные эллиптические и параболические уравнения.

Определение, свойства, область применения

3 Перечень вопросов к кандидатскому экзамену по дисциплине «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

1. .Разделение переменных на примере первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
2. Преобразования Лапласа для решения ОДУ.
3. Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений с частными производными.
4. Дифференциально-инвариантные решения.
5. Метод определяющих уравнений.
6. Псевдоспектральный и τ -методы.
7. Метод Ритца.
8. Метод Петрова – Галёркина.
9. Инвариантные краевые задачи на примере уравнений, описывающих движение жидкости с границей раздела.
10. Инвариантные многообразия и системы Пфаффа
11. Инвариантность и группы преобразований
12. Инвариантные решения моделей механики жидкости
13. Характеристики уравнений второго порядка и их инварианты
14. Применение инвариантов характеристик к интегрированию уравнений второго порядка
15. Характеристики систем уравнений первого порядка и их инварианты
16. Инвариантные формы и тензоры
17. Преобразования конечного порядка и эквивалентность уравнений
18. Каскадный метод Лапласа интегрирования линейных уравнений с частными производными
19. Законы сохранения математических моделей
20. Тензоры и операции над ними.
21. Представление тензоров 2-го ранга.
22. Свойства изотропных тензорных функций. Тождество Гамильтона–Кели.
23. Символы Кристоффеля и их свойства.
24. Дифференцирование тензоров.
25. Свойства тензора Римана.

26. Дифференцирование по параметру тензоров и интегральных выражений от них.
27. Законы сохранения. Непрерывные движения.
28. Тензор напряжений и тензор деформаций.
29. Сильные разрывы.
30. Динамика жидкостей, основные аксиомы.
31. Закон Гука.
32. Пластические течения.
33. Разделение переменных на примере первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
34. Преобразования Лапласа для решения ОДУ.
35. Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений с частными производными.
36. Дифференциально-инвариантные решения.
37. Метод определяющих уравнений.
38. Псевдоспектральный и τ -методы.
39. Метод Рунге.
40. Метод Петрова – Галёркина.
41. Инвариантные краевые задачи на примере уравнений, описывающих движение жидкости с границей раздела.
42. Теорема о неподвижной точке. Случай нестрого сжимающего оператора.
43. Устойчивость неподвижных точек.
44. Теорема Каччополи.
45. Производная Фреше и её свойства.
46. Производная Гато и формула конечных приращений.
47. Теорема о неявном операторе.
48. Теорема Канторовича о сходимости метода Ньютона.
49. Модифицированный метод Ньютона.
50. Принцип Брауэра.
51. Принцип Шаудера.
52. Многозначные отображения и теорема Какутани.
53. Теорема о минимаксе.
54. Монотонные операторы в регулярных конусах.
55. Теорема о неподвижной точке в гильбертовом пространстве для растягивающих операторов.
56. Степень отображения в конечномерном случае.
57. Степень Лере-Шаудера.
58. Вывод уравнения разветвления.
59. Ветвление для уравнения 2-го порядка.
60. Локальная теория бифуркаций.
61. Глобальная теория собственных функций.
62. Определение локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства. Определение орбиты и касательного

- векторного поля. Примеры групп переносов, растяжений, проективных преобразований.
63. Канонический параметр. Производная Ли. Инварианты группы Базис инвариантов. Инфинитезимальный оператор.
 64. Определение инвариантности многообразия (поверхности) относительно группы преобразований. Определение дифференциального многообразия.
 65. Точечные преобразования, их инфинитезимальный оператор. Оператор полного дифференцирования.
 66. Определение продолженного оператора. Определяющие уравнения.
 67. Определение коммутатора в векторном пространстве Алгебра Ли для Размерность, базис, структурные константы алгебры Ли.
 68. Коммутатор инфинитезимальных операторов. Алгебра Ли операторов. Таблица коммутаторов, ее структурные особенности.
 69. Определение инвариантности многообразия, относительно группы преобразований. Критерий инвариантности многообразия относительно
 70. Определение инвариантного H -решения (H – подгруппа) на многообразии E . Степень полноты набора инвариантов группы H .
 71. Ранг инвариантных решений. Орбита многообразия. Ранг и дефект многообразия. Определение частично инвариантного H -решения системы E .
 72. Группа эквивалентности для уравнения Алгоритм отыскания группы эквивалентности. Определение ядра основных групп.
 73. Задача групповой классификации. Описание алгоритма решения задачи групповой классификации.
 74. Инвариантное дифференцирование и базис инвариантов. Дифференциально-инвариантные решения.
 75. Группы Ли – Беклунда. Канонический оператор.
 76. Прямая и обратная теорема Нётер.
 77. Законы сохранения для групп Лоренца.
 78. Техническая точность и управление ею на различных уровнях вычислительного процесса.
 79. Число обусловленности СЛАУ. Особенности решения СЛАУ.
 80. Особенности итерационных методов СЛАУ и уточнения обратной матрицы.
 81. Оценка степенного базиса в задаче о наилучшем квадратичном приближении.
 82. Специальные формы описания алгоритмов.
 83. Формуляры и параллельные вычисления, подпроцессы.
 84. Разностная аппроксимация, явные и неявные разностные схемы.
 85. Свойства разностных схем и теорема Лакса.
 86. Спектральный анализ устойчивости. Условие Куранта–Фридрихса–Леви.

87. Методы расщепления (переменных направлений, дробных шагов, прямых).
88. Задача о наилучшем приближении. Теорема об альтернансе.
89. Фундаментальные интерполяционные многочлены и приближения.
90. Эффекты насыщения методов приближения, класс насыщения.
91. Компакт насыщения, примеры насыщаемых алгоритмов).

4 Критерии оценивания ответа

Отлично	<p>Полно раскрыто содержание вопросов; материал изложен грамотно, в определенной логической последовательности, правильно используется терминология; показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации; продемонстрировано усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, ответ прозвучал самостоятельно, без наводящих вопросов.</p>
Хорошо	<p>Ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом может иметь следующие недостатки: в изложении допущены небольшие пробелы, не искажившие содержание ответа допущены один -два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию</p>
Удовлетворительно	<p>Неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса. Имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после нескольких наводящих вопросов.</p>
Неудовлетворительно	<p>Имели место существенные упущения при ответах на все вопросы билета или полное несоответствие по более чем 50% материала вопросов билета</p>

5 Учебно-методическое и информационное обеспечение

5.1 Основная литература

- 1 Владимирова В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимирова, В. В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2003. (ИВМ СО РАН)

- 2 Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. (СФУ)
- 3 Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. (ИВМ СО РАН)
- 4 Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 2004. (ИВМ СО РАН)
- 5 Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 2004 (и последующие издания). (ИВМ СО РАН)
- 6 Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1963 (и последующие издания). (ИВМ СО РАН)
- 7 Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: ГИТТЛ, 2008 (и последующие издания). (ИВМ СО РАН)
- 8 Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: Изд-во иностр. лит., 2005. (ИВМ СО РАН)
- 9 Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 2003. (ИВМ СО РАН)
- 10 Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – М.: Физматлит, 2007. (ИВМ СО РАН)

5.2 Дополнительная литература

- 1 Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1971. (ИВМ СО РАН)
- 2 Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. (ИВМ СО РАН)
- 3 Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач: Учебн. пособие / А. М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с. (ИВМ СО РАН)
- 4 Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – М.: Наука, 1961. (СФУ)
- 5 Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М.: Наука, 1985. (СФУ)
- 6 Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М. А. Шубин. – М.: Наука, 1978. (ИВМ СО РАН).

5.3 Интернет ресурсы

1. Scopus, база данных рефератов и цитирования, <http://www.scopus.com>.
2. ScienceDirect (Elsevier), база данных научного цитирования, естественные науки, техника, медицина и общественные науки, <http://www.sciencedirect.com>.
3. :Web of Science Core Collection – международная междисциплинарная база данных научного цитирования, <http://www.webofknowledge.com>.
4. Электронно-библиотечная система издательства «ЛАНЬ», <http://e.lanbook.com>.
5. Университетская библиотека ONLINE, электронно-библиотечная система, <http://biblioclub.ru/>.
6. Образовательная платформа - электронно-библиотечная система издательства «Юрайт», <https://urait.ru/>.
7. Электронно-библиотечная система Znanium.com, <http://www.znaniy.com>.
8. Центральная Научная Библиотека имени Н.И. Железнова, <http://www.library.timacad.ru>.
9. United Nations Environment Program: www.unep.org.
10. eLIBRARY.RU Научная электронная библиотека, <http://elibrary.ru/>.
11. Национальная электронная библиотека, <https://rusneb.ru/>.
12. Электронная библиотека IOP Science дома научного контента от IOP Publishing, <http://iopscience.iop.org/>.
13. Электронная библиотека SPIE. Digital library, <http://spiedigitallibrary.org/>.
14. Архив научных журналов Министерства образования и науки Российской Федерации, <http://archive.neicon.ru/xmlui/>.
15. Библиотека издательства Annual Reviews, библиотека журналов <http://www.annualreviews.org>.
16. Библиотека Российского фонда фундаментальных исследований, <http://www.rfbr.ru/rffi/ru/library>.
17. Центральная научная библиотека ФИЦ КНЦ СО РАН, <http://cnb.krasn.ru>.
18. Электронная библиотека Nature, <http://www.nature.com>.
19. Электронная библиотека Science, <http://www.sciencemag.org>.
20. База данных научного цитирования издательства Taylor&Francis Group, <http://www.tandfonline.com/>.
21. Онлайн-библиотека Wiley Online Library, <http://onlinelibrary.wiley.com>.
22. Электронная библиотека журналов открытого доступа ACS Publications, <http://pubs.acs.org/>.
23. Электронная библиотека журналов Американского физического общества APS physics, <http://publish.aps.org>.
24. Электронно-библиотечная система Scitation, издательство AIP Publishing Books, <http://scitation.aip.org/>.

25. Цифровой образовательный ресурс – электронная библиотечная система IPR SMART, <http://www.iprbookshop.ru/>.
26. Библиотека издательства Oxford Academic, <http://www.oxfordjournals.org>.
27. Справочная библиотека издательства Oxford University Press, цифровая платформа Oxford Reference, <http://www.oxfordreference.com>.
28. Электронная система исследовательских журналов мирового уровня открытого доступа SAGE journals, <http://online.sagepub.com/>.

Согласовано:

Заведующий кафедрой фундаментальных
дисциплин и методологии науки



В.В. Минеев

Заведующий аспирантурой



Е.В. Нефедова

Декан факультета подготовки кадров



А.Н. Кокорин