

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр
Сибирского отделения Российской академии наук»
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)**

УТВЕРЖДАЮ:

Директор ФИЦ КНЦ СО РАН

А.А. Шпедт

« 25 »

января

2022г.

**ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика»**

Научная специальность:

**1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика»**

Отрасль наук:

физико-математические науки

Красноярск 2022

1 Общие положения

Программа кандидатского экзамена разработана на кафедре фундаментальных дисциплин и методологии науки факультета подготовки кадров ФИЦ КНЦ СО РАН в соответствии со следующими документами:

- Приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 20 октября 2021 г. №951 «Об утверждении федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов)»;
- Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней»;
- Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре ФИЦ КНЦ СО РАН;
- Порядком сдачи кандидатских экзаменов и прикрепления лиц к ФИЦ КНЦ СО РАН для сдачи кандидатских экзаменов;
- Паспортом научной специальности.

Цель проведения экзамена: оценить уровень знаний, умений и навыков в области вычислительной математики.

Экзамен по специальной дисциплине должен выявить уровень теоретической и профессиональной подготовки экзаменуемого, знание общих концепций и методологических вопросов данной науки, истории ее формирования и развития, фактического материала, основных теоретических и практических проблем данной отрасли знаний.

К кандидатскому экзамену допускаются лица, прикрепленные к ФИЦ КНЦ СО РАН для сдачи кандидатских экзаменов без освоения программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, и аспиранты, обучающиеся в ФИЦ КНЦ СО РАН по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (далее – экзаменуемые).

Кандидатский экзамен по дисциплине «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»; проводится по билетам. Экзаменационный билет включает в себя три теоретических вопроса по данной научной специальности и отрасли науки, по которой подготавливается или подготовлена диссертация.

2 Содержание программы кандидатского экзамена

Математическая логика

Логические исчисления

Исчисление высказываний Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.

Исчисление предикатов Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.

Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов Тавтологически истинные формулы исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.

Теория алгоритмов

Тезис Черча Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.

Алгоритмические проблемы Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи **ВЫПОЛНИМОСТЬ**.

Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства). Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.

Алгебра

Группы

Конечные группы Определяется понятие силовской подгруппы. Теорема о существовании силовской подгруппы для любой конечной группы. Теорема о разрешимости конечной p-группы. Теоремы Силова. Простота группы A_n , $n \geq 5$. Простота группы SO_3 .

Свободные группы. Порождающие множества группы. Образующие элементы группы. Свободная группа как универсальный объект в категории групп. Свойства свободной группы. Теорема о существовании копроизведения в категории групп. Свободные абелевы группы.

Кольца и модули

Кольца. Евклидовы кольца. Понятие неприводимого элемента целостного кольца. Об однозначном разложении элемента на неприводимые элементы. Понятие факториального кольца. Наибольший общий делитель в целостном кольце главных идеалов. Теорема о факториальности целостного кольца

главных идеалов. Проблемная лекция. Евклидовы кольца – кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов. Радикал кольца, его нильпотентность в артиновых кольцах. Теорема плотности. Простые и полупростые кольца с условием минимальности.

Модули. Конечно порожденные модули. Основные понятия теории модулей: теорема о гомоморфизме; свободные модули; циклические модули над кольцом главных идеалов. Теорема о строении конечно порожденных модулей над евклидовым кольцом. Следствия основной теоремы о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом для групп и линейных операторов. Группа Брауэра. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.

Поля.

Алгебраические расширения полей. Понятия расширения поля, алгебраического расширения поля, степени расширения. Теорема о расширении конечного поля. Теорема о конечной порожденности конечного расширения поля. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена.

Конечные поля. Основная теорема теории Галуа. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.

Решетки и алгебры

Решетки. Понятия решетки, дистрибутивной решетки, модулярной решетки. Теорема Биркгофа. Решетки. Дедекиндовы решетки. Решетки идеалов в кольцах и нормальных подгрупп в группах. Дистрибутивные решетки и булевы алгебры. Теорема Стоуна.

Алгебры. Теорема Фробениуса об алгебрах с делением. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли. Примеры простых алгебр Ли. Теорема Биркгофа-Витта. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Примеры многообразий для основных алгебраических структур.

Теория чисел

Тригонометрические суммы

Модуль гауссовой суммы Первообразные корни и индексы. Квадратичный закон взаимности. Модуль гауссовой суммы.

Полные тригонометрические суммы Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений. Ряды Эйзенштейна. Разложения в ряд Фурье.

Модулярные формы

Модулярный инвариант Модулярные формы. Теорема о строении алгебры модулярных форм. Модулярный инвариант. Проблемная лекция.

Поле модулярных функций Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами. Поле модулярных функций.

Приближение вещественных чисел рациональными

Теорема Дирихле Приближение вещественных чисел рациональными. Теорема Дирихле.

Приближение алгебраических чисел Теорема Лиувилля о приближении алгебраических рациональными. Примеры трансцендентных чисел.

Теория характеров

Характеры Дирихле Характеры Дирихле и их простейшие свойства. L - функции Дирихле суммы характеров.

Характеры абелевой группы Характеры квадратичного поля. Характеры абелевой группы.

Перечень вопросов к кандидатскому экзамену по дисциплине «Вычислительная математика»

Математическая логика и теория алгоритмов

- 1 Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Черча.
- 2 Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
- 3 Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
- 4 Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP –полные задачи. Теорема об NP полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ.
- 5 Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
- 6 Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
- 7 Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
- 8 Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
- 9 Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
- 10 Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
- 11 Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
- 12 Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
- 13 Неразрешимость алгебраической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
- 14 Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

Алгебра

- 1 Теоремы Силова.
- 2 Простота группы A_n , $n \geq 5$ и SO_3 .
- 3 Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
- 4 Свободные группы и определяющие соотношения.

- 5 Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
- 6 Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
- 7 Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
- 8 Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
- 9 Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
- 10 Основы теории представлений. Теория Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
- 11 Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
- 12 Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Теория чисел

- 1 Квадратичный закон взаимности.
- 2 Первообразные корни и индексы.
- 3 Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
- 4 Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
- 5 Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
- 6 Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
- 7 Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
- 8 Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
- 9 Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
- 10 Трансцендентность чисел π и e .

4. Критерии оценивания ответа

Отлично	Полно раскрыто содержание вопросов; материал изложен грамотно, в определенной логической последовательности, правильно используется терминология; показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации; продемонстрировано усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, ответ прозвучал самостоятельно, без наводящих вопросов.
Хорошо	Ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом может иметь

	следующие недостатки: в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие содержание ответа допущены один -два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию
Удовлетворительно	Неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса. Имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после нескольких наводящих вопросов.
Неудовлетворительно	Имели место существенные упущения при ответах на все вопросы билета или полное несоответствие по более чем 50% материала вопросов билета

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение

5.1 Основная литература

- 1 Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – 14-е изд., стереотип. – Санкт – Петербург; Краснодар: Лань, 2005. -431 с.
- 2 Плотников Д.А. Дискретная математика / Д.А Плотников. -2-е изд., исп. И доп. – Москва: Новое знание, 2006. -304 с.
- 3 Вейл Г. О философии математики: перевод с немецкого / Г. Вейль. – Изд. 3-е. –М.: URSS: КомКнига, 2010. -128 с.

5.2. Дополнительная литература

- 1 Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. М.: Физ.-мат. лит., - 2000. – 272с.
- 2 Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физ.-мат. лит., - 2000. – 368с.
- 3 Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры. М.: Физ.-мат. лит., - 2000. – 272с.
- 4 Понтрягин Л.С. Непрерывные группы, М.: Едиториал УРСС, -2009. – 560 с.
- 5 Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Санкт – Петербург; Краснодар: Лань, 2004. - 592 с.
- 6 Скорняков Л.А., Общая алгебра. Т. 1., М.: Наука, -1990. – 354 с.
- 7 Ершов Ю.Л., Палютин Е.А., Математическая логика. Санкт-Петербург: Лань, - 2004. – 336 с.
- 8 Ван дер Варден Б.Л., Алгебра. М.: Наука, 1976. – 648 с.
- 9 Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, - 1970. - 400 с.

- 10 Новиков. П.С. , Элементы математической логики. М.: Наука. 1973. – 400 с.
- 11 Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука. – 1972, - 240с.
- 12 Курош А.Г. , Теория групп. М: Наука. – 1968. - 648 с.
- 13 Холл М., Теория групп. М.: Мир. – 1962. – 468 с.
- 14 Carter R. Simple groups of Lee type. Willey and Suns, NY, -1972. -332 с.
- 15 Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. Amsterdam: Elsevier, - 1997.– 570с.

5.3 Интернет ресурсы

1. Scopus, база данных рефератов и цитирования, <http://www.scopus.com>.
2. ScienceDirect (Elsevier), база данных научного цитирования, естественные науки, техника, медицина и общественные науки, <http://www.sciencedirect.com>.
3. :Web of Science Core Collection – международная междисциплинарная база данных научного цитирования, <http://www.webofknowledge.com>.
4. Электронно-библиотечная система издательства «ЛАНЬ», <http://e.lanbook.com>.
5. Университетская библиотека ONLINE, электронно-библиотечная система, <http://biblioclub.ru/>.
6. Образовательная платформа - электронно-библиотечная система издательства «Юрайт», <https://urait.ru/>.
7. Электронно-библиотечная система Znanium.com, <http://www.znanium.com>.
8. Центральная Научная Библиотека имени Н.И. Железнова, <http://www.library.timacad.ru>.
9. United Nations Environment Program: www.unep.org.
10. eLIBRARY.RU Научная электронная библиотека, <http://elibrary.ru/>.
11. Национальная электронная библиотека, <https://rusneb.ru/>.
12. Электронная библиотека IOP Science дома научного контента от IOP Publishing, <http://iopscience.iop.org/>.
13. Электронная библиотека SPIE. Digital library, <http://spiedigitallibrary.org/>.
14. Архив научных журналов Министерства образования и науки Российской Федерации, <http://archive.neicon.ru/xmlui/>.
15. Библиотека издательства Annual Reviews, библиотека журналов <http://www.annualreviews.org>.
16. Библиотека Российского фонда фундаментальных исследований, <http://www.rfbr.ru/rffi/ru/library>.
17. Центральная научная библиотека ФИЦ КНЦ СО РАН, <http://cnb.krasn.ru>.
18. Электронная библиотека Nature, <http://www.nature.com>.
19. Электронная библиотека Science, <http://www.sciencemag.org>.
20. База данных научного цитирования издательства Taylor&Francis Group, <http://www.tandfonline.com/>.
21. Онлайн-библиотека Wiley Online Library, <http://onlinelibrary.wiley.com>.

22. Электронная библиотека журналов открытого доступа ACS Publications, <http://pubs.acs.org/>.
23. Электронная библиотека журналов Американского физического общества APS physics, <http://publish.aps.org>.
24. Электронно-библиотечная система Scitation, издательство AIP Publishing Books, <http://scitation.aip.org/>.
25. Цифровой образовательный ресурс – электронная библиотечная система IPR SMART, <http://www.iprbookshop.ru/>.
26. Библиотека издательства Oxford Academic, <http://www.oxfordjournals.org>.
27. Справочная библиотека издательства Oxford University Press, цифровая платформа Oxford Reference, <http://www.oxfordreference.com>.
28. Электронная система исследовательских журналов мирового уровня открытого доступа SAGE journals, <http://online.sagepub.com/>.

Согласовано:

Заведующий кафедрой фундаментальных
дисциплин и методологии науки



В.В. Минеев

Заведующий аспирантурой



Е.В. Нефедова

Декан факультета подготовки кадров



А.Н. Кокорин