

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр
Сибирского отделения Российской академии наук»
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)**



УТВЕРЖДАЮ
Директор ФИЦ КНЦ СО РАН

А.А. Шпедт

2026г.

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

«Математика и механика»

для поступающих на обучение по образовательной программе высшего
образования – программе подготовки научных
и научно-педагогических кадров в аспирантуре ФИЦ КНЦ СО РАН

по группе научных специальностей 1.1 – Математика и механика

Красноярск 2026

1 Общие положения

Настоящая программа сформирована на основе федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре и определяет общее содержание вступительного испытания по специальной дисциплине «Математика и механика» при приеме на обучение по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук».

Вступительное испытание по специальной дисциплине «Математика и механика» нацелено на оценку знаний лиц, поступающих на программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, полученных ими в ходе освоения программ специалитета и (или) магистратуры, и на отбор среди поступающих лиц, наиболее способных и подготовленных к научной и научно-исследовательской деятельности, имеющих потенциал в части генерирования новых идей при решении исследовательских задач и подготовки диссертации на соискание ученой степени кандидата наук.

2 Форма проведения и содержание вступительного испытания

Вступительное испытание проводится на русском языке в устной форме.

Содержание вступительного испытания по специальной дисциплине «Математика и механика» состоит из разделов, соответствующих научным специальностям, входящих в группу научных специальностей:

1.1 – Математика и механика:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (Приложение 1);
- 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (Приложение 2);
- 1.1.6 – Вычислительная математика (Приложение 3);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (Приложение 4);
- 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы (Приложение 5).

Экзаменационный билет содержит три теоретических вопроса, входящих в один раздел, соответствующий научной специальности поступающего в Аспирантуру ФИЦ КНЦ СО РАН.

3 Критерии оценивания ответов поступающих

Результаты вступительного испытания определяются по 50-бальной шкале (от 0 до 50 баллов). Максимальное количество баллов подтверждающее успешное прохождение вступительного испытания – 50 баллов. Минимальное количество баллов, подтверждающее успешное прохождение вступительного испытания – 20 баллов.

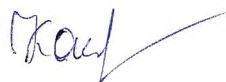
50 – бальная шкала	Общая характеристика ответа	Критерии оценки
41–50 баллов	Ответ отличный	Ясный, достаточно точный, уверенный ответ на все вопросы экзаменационного билета, дополнительные и уточняющие вопросы. Глубокое знание материала. Свободное владение понятийным аппаратом, научным языком и терминологией. Логически правильное и убедительное изложение ответа. Ответ на вопрос достаточно аргументирован и обоснован, приведены убедительные примеры по каждому вопросу экзаменационного билета.
31-40 баллов	Ответ хороший	Ясный и уверенный ответ на все вопросы билета. Знание ключевых проблем и основного содержания материала. Умение оперировать понятиями по своей тематике. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа. Допущены незначительные ошибки в терминологии и при использовании фактического материала. Ответ на дополнительные и уточняющие вопросы.
20-30 баллов	Ответ удовлетвори- тельный	Ответ на все вопросы билета, требующий существенных дополнений. Недостаточно логичное и аргументированное изложение ответа. Фрагментарные, поверхностные знания материала. Затруднения с использованием понятийного аппарата и терминологии. Отсутствуют ответы на дополнительные и уточняющие вопросы.
0 – 19 баллов	Ответ неудовлетвори- тельный	Отсутствие ответа на вопросы билета; ответ только на один из вопросов; попытка ответа на все вопросы без раскрытия основного содержания; подмена ответа на вопросы экзаменационного билета ответом на смежные вопросы. Полное незнание либо отрывочное представление о материале. Неумение оперировать понятиями по своей тематике. Неумение логически определенно и последовательно излагать ответ.

4 Список литературы

Список литературы для подготовки к вступительному испытанию по специальной дисциплине «Математика и механика» представлен в Приложениях 1 – 5 к настоящей Программе, рекомендованный для каждой научной специальности.

Согласовано:

Заведующий кафедрой
фундаментальных дисциплин
и методологии науки



О.В. Александрова

Заведующий аспирантурой



Е.В. Нефедова

Декан факультета подготовки кадров



А.Н. Кокорин

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА
программы вступительного испытания по специальной дисциплине
«Математика и механика» по научной специальности
1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Элементы линейной алгебры

1. Алгебраические операции и алгебраические системы, изоморфизм.
2. Определение и примеры групп, колец и полей.
3. Определитель квадратной матрицы, его поведение при транспонировании матрицы, элементарных преобразованиях строк и столбцов, умножении матриц. Разложение определителя по строке, критерий обратимости и вычисление обратной матрицы.
4. Линейная зависимость набора векторов, базис и размерность векторного пространства.
5. Координаты вектора и их преобразование при смене базиса пространства. Размерность суммы и пересечения подпространств.
6. Линейные преобразования векторных пространств и их матрицы. Ранг матрицы как размерность образа линейного преобразования.
7. Критерий совместности системы линейных уравнений. Множество решений совместной неоднородной системы и пространство решений соответствующей однородной системы.
8. Алгоритм Евклида поиска наибольшего общего делителя многочленов. Разложение на неразложимые множители.
9. Теорема о существовании корня многочлена в расширении поля. Формулы Виета и основная теорема о симметрических многочленах.
10. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
11. Образ, ядро, ранг и дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования.
12. Собственные векторы, собственные значения и корни характеристического многочлена (спектр) линейного преобразования, теорема Гамильтона – Кэли.
13. Жорданова классификация линейных преобразований и жорданова форма матриц (существование, единственность). Задача о подобии матриц.
14. Аксиоматика евклидовых и унитарных пространств, длины и углы, неравенство Коши – Буняковского.
15. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Ортогональное дополнение и ортогональные разложения в евклидовых и унитарных пространствах.
16. Канонический вид эрмитовых и симметрических преобразований и матриц. Канонический вид унитарных и ортогональных преобразований и матриц.
17. Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Положительно определённые формы (критерий Сильвестра).

Элементы геометрии

1. Аффинные и ортонормальные системы координат. Формулы замены координат. Вычисление скалярных произведений, длин отрезков и углов.
2. Геометрические основы теории определений. Одинаково и противоположно ориентированные реперы, ориентация пространства. Вычисление объёма параллелепипеда, построенного по реперу, через координаты составляющих векторов. Геометрический смысл детерминанта матрицы Грама. Векторное и смешанное произведение в 3-мерном ориентированном евклидовом пространстве.
3. Аффинные подпространства. Задание аффинного подпространства параметрическим уравнением и системой уравнений. Существование и единственность аффинного отображения, имеющего заданные значения в заданных точках. аффинные свойства фигур (прямолинейность, выпуклость, связность и т. п.). Инвариантные подпространства аффинных и ортогональных преобразований. Разложение аффинного отображения в произведение растяжения и ортогонального отображения.
4. Линии и поверхности 2-го порядка. Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания. Линия второго порядка (фокусы, асимптоты, оптические свойства). Построение поверхностей 2-го порядка. Алгоритмы отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной общим уравнением 2-й степени. Метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) для определения аффинного типа поверхности 2-го порядка.
5. Теория кривых. Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль. Кручение кривой. Теорема о задании кривой натуральными уравнениями.
6. Теория поверхности. Первая и вторая квадратичная форма. Универсальная связь между первой и второй квадратичными формами поверхности.

Элементы математического и функционального анализа

1. Вещественная прямая и её топология. Пределы последовательностей и функций, свойства пределов. Теорема о пределе монотонной последовательности (функции). Критерий Коши существования предела.
2. Понятие ряда. Примеры. Необходимый признак сходимости. Принцип сравнения. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Телескопический признак сходимости. Критерий Коши суммируемости ряда. Признаки Абеля и Дирихле сходимости. Примеры условно сходящихся рядов. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов. Степенные ряды. Свойства суммы степенного ряда. Операции над степенными рядами. Теорема Абеля о непрерывности степенного ряда на границе круга сходимости.
3. Непрерывные функции и их свойства. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на замкнутых промежутках. Теорема Больцано –

- Коши о промежуточных значениях. Признак Больцано строгой монотонности. Теорема о существовании непрерывной обратной функции. Равномерная непрерывность, модуль непрерывности и теорема Кантора.
4. Понятие дифференцируемости и её свойства. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа о конечных приращениях, Коши.
 5. Производные высших порядков, их свойства. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Представления остаточного члена в формуле Тейлора в форме Лагранжа и Коши.
 6. Дифференциальный признак монотонности функции. Условие внутреннего экстремума функции (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, достаточные условия).
 7. Понятие выпуклой функции. Неравенство Йенсена. Дифференциальные признаки выпуклости функции.
 8. Неравенства Юнга, Коши, Гёльдера и Минковского.
 9. Последовательности и ряды функций. Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Примеры. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости. Равномерная сходимость и непрерывность. Теорема Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности непрерывных функций.
 10. Определение интеграла Римана и его свойства. Интеграл как аддитивная функция промежутка интегрирования. Оценки для интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной. Определения и основные свойства несобственных интегралов. Критерий сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Исследование сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Основные признаки сходимости: Вейерштрасса (мажорантный признак), Абеля, Дирихле.
 11. Определение основных топологических понятий в пространстве R_n . Точки прикосновения, предельные и изолированные точки по отношению к данному множеству. Замкнутые множества, их свойства. Понятие замыкания множества. Понятие границы и её свойства. Открытые множества, их свойства. Шар как открытое множество. Понятие внутренней точки множества. Понятие открытой окрестности и окрестности множества. Свойства системы окрестностей.
 12. Понятие предела функции в пространстве R_n и его свойства. Теорема о суперпозиции. Координатный критерий сходимости R_n . Предел по Гейне. Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши. Полнота пространства R_n . Компактные множества в R_n . Свойства компактных множеств. Понятие полной ограниченности. Эквивалентные определения компактных множеств в R_n . Теорема о непрерывном образе компактного множества. Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях. Равномерно непрерывные отображения. Теорема Кантора. Теорема о продолжении равномерно непрерывных отображений.

13. Дифференцируемость и дифференциал функции в точке. Дифференциал и частные производные. Координатное представление дифференциала. Матрица Якоби. Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке. Линейность операции дифференцирования. Дифференцирование суперпозиции дифференцируемых отображений. Теорема о конечных приращениях; следствия. Теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции во внутренней точке. Теорема об обратной функции. Понятие диффеоморфизма для открытых множеств в R_n . Теорема о неявных функциях. Условные экстремумы (постановка задачи). Принцип множителей Лагранжа. Достаточное условие экстремума.
14. Кратный интеграл, определение и свойства. Теорема о повторном интегрировании. Теоремы о замене переменной в кратном интеграле. Объём шара в R_n .
15. Теоремы о предельном переходе по параметру, непрерывности по параметру, дифференцируемости по параметру (правило Лейбница), интегрируемости по параметру. Гамма- и бета-функции Эйлера. Область определения, формулы понижения, формулы Эйлера, Гаусса, формула дополнения, связь между эйлеровыми функциями. Интеграл Эйлера – Пуассона.
16. Криволинейные и поверхностные интегралы первого и второго рода: формулы Грина, Гаусса – Остроградского, Стокса.
17. Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье. Свойства преобразования Фурье. Примеры. Достаточные условия представимости функции её интегралом Фурье. Гладкость функции и скорость убывания её преобразования Фурье. Пространство быстро убывающих функций (свойства). Формула обращения. Равенство Парсеваля. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье и свёртка.
18. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Компактность в топологических пространствах.
19. Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения.
20. Нормированные пространства (примеры, эквивалентные нормы, нормированные решётки, сепарабельность).
21. Банаховы пространства (примеры, пополнение, критерии полноты, полнота пространства операторов и фактор-пространства).
22. Гильбертовы пространства (примеры, неравенство Коши – Буняковского, теорема фон Неймана – Йордана).
23. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства. Теорема Д. Ф. Егорова. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

24. Ограниченные линейные операторы (операторная норма, критерии ограниченности, линейная изометрия).
25. Теорема Хана – Банаха и её следствия (продолжение ограниченного функционала, рефлексивность, теорема об отделимости).
26. Теорема Бэра о категории и её следствия (принцип ограниченности, слабая и слабая* ограниченность и сходимости, соотношения между ними).
27. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Теоремы Фредгольма.

Теория функций комплексного переменного

1. Условия Коши – Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Теорема Морера. Интегральная формула Коши.
2. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Внутренняя теорема единственности аналитической функции. Принцип максимума модуля и принцип аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов.
3. Принцип аналитического продолжения. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей.
4. Формулы Сохоцкого – Племеля. Восстановление функций аналитической функции по её вещественной части на окружности (формула Шварца). Решение задачи Дирихле для круга (формула Пуассона).

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. *Линейные дифференциальные уравнения.* Системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Теорема о непрерывной зависимости. Пространство решений однородных систем. Фундаментальная система решений. Теорема Остроградского – Лиувилля. Свойства матричной экспоненты. Метод вариации произвольной постоянной. Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка. Фундаментальная матрица решений. Определитель Вронского. Способы нахождения фундаментальной системы решений для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. *Краевые задачи для систем линейных дифференциальных уравнений.* Краевая задача для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на числовой прямой. Матрица Грина. Краевые задачи на полупрямой. Условие Лопатинского. Краевые задачи на интервале. Условие однозначной разрешимости. Матрица Грина. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Функция Грина. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и функции, их свойства.

3. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений. Теоремы Пеано, Пикара. Непродолжаемые решения. Теорема о покидании компакта для непродолжаемых решений. Существование решений в целом. Функция Ляпунова. Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных значений. Дифференцируемость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных значений. Уравнения в вариациях Пуанкаре. Автономные системы дифференциальных уравнений. Виды траекторий.
4. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Асимптотическая устойчивость. Спектральные критерии устойчивости и асимптотической устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. Матричное уравнение Ляпунова. Критерий асимптотической устойчивости в терминах разрешимости уравнения Ляпунова. Устойчивость решений линейных систем с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке – Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теоремы Ляпунова и Четаева о неустойчивости. Теоремы об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению.
5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.
6. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
7. Уравнения с частными производными первого порядка. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Независимые первые интегралы. Общее решение однородных линейных уравнений с частными производными первого порядка. Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши. Характеристики. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши. Уравнение Гамильтона – Якоби.

Уравнения с частными производными

1. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши – Ковалевской.
2. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.
3. Дифференциальные уравнения с частными производными. Примеры уравнений, возникающих при моделировании физических процессов: уравнение колебаний струны, телеграфное уравнение, волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа.
4. Определение краевой задачи для уравнений с частными производными. Постановки краевых задач для уравнений второго порядка. Понятие корректности краевой задачи. Условие Адамара как необходимое условие

- корректности задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. Примеры Адамара, Ковалевской, Леви.
5. Метод Фурье решения двумерных краевых задач для уравнений второго порядка. Корректность первой и второй краевых задач для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности. Преобразования Фурье и Лапласа.
 6. Гиперболические уравнения. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа, интеграл энергии. Энергетические оценки. Конечная область зависимости решений задачи Коши. Метод Дюамеля для построения решения неоднородного уравнения.
 7. Параболические уравнения. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности в классе ограниченных и быстрорастущих растущих функций. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Принцип максимума, единственность классического решения первой краевой задачи в цилиндрической области. Формула Пуассона.
 8. Эллиптические уравнения. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Гармонические функции. Неравенства для средних значений гармонических функций. Теорема единственности задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Принцип максимума. Интегральная формула Грина. Функция Грина задачи Дирихле. Интегральная формула Пуассона решения задачи Дирихле в шаре. Неравенства Гарнака. Теорема Лиувилля для гармонических функций. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле, Неймана для уравнения Лапласа.
 9. Пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и их свойства. Теоремы вложения.
 10. Обобщённые решения краевых и начально-краевых задач для линейных уравнений 2-го порядка общего вида: эллиптического, гиперболического, параболического. Применение метода Галёркина.
 11. Проблема минимума квадратичного функционала. Связь с обобщённым решением краевой задачи для эллиптического уравнения.

Методы вычислений

1. Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Эйлера, Рунге – Кутты, Адамса, стрельбы, прогонки. Устойчивость метода.
2. Численные методы решения задач математической физики: бегущего счёта (гиперболические уравнения), явные и неявные схемы (параболические уравнения), итерационные методы (уравнение Лапласа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. СПб.: Лань, 2007.

2. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. 5-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2009. 480 с.
3. Погорелов, А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. 3-е изд. М. : Наука, 1968. 176 с.
4. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. 6-е изд., стереотип. М. : Наука, 1974. 176 с.
5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. М. : Высшая школа, 1985.
6. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. М. : Наука, 1969.
7. Никольский, С. М. Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. М. : Физматлит, 2001.
8. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М. : Физматлит, 2006.
9. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. СПб. : Лань, 2009.
10. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. М. : Наука, 2003.
11. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения : 6-е изд., стереотип. М. : URSS, 2001.
12. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. М. : Физматлит, 2003.
13. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. М. : Наука, 1983.
14. Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. СПб.: Лань, 2002. 576 с.
15. Петровский, И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. М. : Наука, 1970.
16. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1962; М. : Наука, 1988.
17. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М. : ГИТТЛ, 2008 (и последующие издания).
18. Березин, Н. О., Жидков, Н. П. Методы вычислений : в 2 т. / Н. О. Березин, Н. П. Жидков. М. : Физматлит, 1962.
19. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. Новосибирск : Наука, 1972.

Составитель программы по научной специальности 1.1.2 –
Дифференциальные уравнения и математическая физика:

доктор физ.-мат. наук

старший научный сотрудник ИВМ СО РАН

И. В. Степанова

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА

**программы вступительного испытания по специальной дисциплине
«Математика и механика» по научной специальности**

1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Общие сведения из математики

1. Формула Виета и основная теорема о симметрических многочленах.
2. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
3. Линии и поверхности второго порядка.
4. Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания.
5. Линия второго порядка (фокусы, асимптоты, оптические свойства).
6. Поверхность второго порядка, алгоритм отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной уравнением второго порядка.

Общие сведения из математической логики

1. Логика высказываний
2. Исчисление высказываний, его корректность и полнота.
3. Логика предикатов первого порядка
4. Аксиоматическая теория множеств
5. Аксиома выбора
6. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело

Основные понятия и теоремы алгебры

1. Многочлены. Делимость многочленов
2. Алгоритм деления многочленов с остатком
3. Наибольший общий делитель многочленов
4. Алгоритм Евклида
5. Разложение многочленов на неразложимые множители.
6. Корни и значения
7. Теорема Безу
8. Формула Тейлора
9. Интерполяционный многочлен
10. Основная теорема алгебры

Основные понятия и теоремы теории групп

1. Теорема Кэли

2. Теорема Лагранжа, следствия
3. Группы диэдра, свойства, примеры
4. Группы Фробениуса, свойства, примеры
5. Группы Шункова, свойства
6. Проблема Бернсайда. О примерах групп Ольшанского и Новикова-Адяна
7. Теоремы Силова. Центр и коммутант группы. Простые, разрешимые и нильпотентные группы.
8. Теорема Кэли. Лемма Шура. Теорема Машке.
9. Условия конечности: условие минимальности, условие максимальности, условие слойной конечности
10. Классы групп: локально конечные группы, локально нормальные группы, группы диэдра группы Фробениуса, черниковские группы, группы Шункова
11. Проблема Бернсайда. Примеры периодических не локально конечных групп.

Основные понятия и теоремы теории чисел

1. Теорема о разложении целых чисел в произведение простых сомножителей
2. Важнейшие арифметические функции
3. Вполне упорядоченные множества
4. Теорема Ферма
5. Теорема Эйлера
6. Сравнения, их свойства
7. Сравнения второй степени. Квадратичный закон взаимности
8. Теорема о разложении целых чисел в произведение простых сомножителей

Основные понятия дискретной математики

1. Лемма Цорна
2. Континуум-гипотеза
3. Графы групп
4. Метод математической индукции
5. Размещения, перестановки, сочетания
6. Мощность множеств
7. Операции над множествами
8. Формула бинома Ньютона
9. Эйлеровы и гамильтоновы графы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 14-е изд., стереотип. Санкт – Петербург; Краснодар: Лань, 2005. – 431 с.
2. Курош А.Г. Теория групп. М: Наука. 1968. – 648 с.
3. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А., Математическая логика. Санкт-Петербург: Лань, 2004. – 336 с.

Дополнительная литература

1. Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. М.: Физ.-мат. лит., 2000. – 272с.
2. Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физ.-мат. лит., 2000. – 368с.
3. Кострикин А.И., Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры. М.: Физ.-мат. лит., 2000. – 272с.
4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы, М.: Едиториал УРСС, 2009. – 560 с.
5. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Санкт – Петербург; Краснодар: Лань, 2004. – 592 с.
6. Скорняков Л.А., Общая алгебра. Т. 1., М.: Наука, 1990. – 354 с.
7. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра. М.: Наука, 1976. – 648 с.
8. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. – 400 с.
9. Новиков. П.С., Элементы математической логики. М.: Наука. 1973. – 400 с.
10. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука. 1972, – 240с.
11. Холл М., Теория групп. М.: Мир. 1962. – 468 с.

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА
программы вступительного испытания по специальной дисциплине
«Математика и механика» по научной специальности
1.1.6 – Вычислительная математика

Общая часть

Линейная алгебра

1. Линейное пространство. Базис. Размерность. Элементарные матрицы. Детерминант квадратной матрицы. Ранг матрицы.
2. Система линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений.
3. Линейные операторы. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Жорданова форма матрицы линейного оператора.
4. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Математический анализ

1. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости.
2. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность.
3. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема о среднем значении, формула Тейлора).
4. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
5. Собственные и несобственные интегралы. Сходимость несобственного интеграла.
6. Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства.

Функциональный анализ

1. Метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений.
2. Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве.
3. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.
4. Линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Теорема Фредгольма.
5. Обобщенная производная. Пространства Соболева. Понятие о теоремах вложения.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
2. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Фундаментальная система решений. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).
3. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений по Ляпунову.

Уравнения в частных производных

1. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики.
2. Основные уравнения математической физики, постановка начально-краевых задач.
3. Классификация уравнений математической физики.

Специальная часть

Численные методы линейной алгебры

1. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод исключения Гаусса, метод L - U разложения, метод прогонки.
2. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя. Сходимость.
3. Метод сопряженных градиентов решения систем линейных алгебраических уравнений.
4. Метод последовательной верхней релаксации решения систем линейных алгебраических уравнений.
5. Задача на собственные значения. Метод вращений. Оценка собственных чисел.

Численный анализ

1. Вычисление корней нелинейного уравнения. Метод хорд и метод Ньютона.
2. Аппроксимация функций. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона.
3. Интерполяционный кубический сплайн.
4. Приближенное вычисление определенных интегралов. Интерполяционные квадратурные формулы. Формула трапеций, формула Симпсона.
5. Квадратурные формулы типа Гаусса для приближенного вычисления определенных интегралов.

Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Задача Коши. Метод Эйлера. Методы Рунге-Кутты.
2. Явные и неявные методы Адамса. Погрешность аппроксимации явных методов Адамса.
3. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод стрельбы, метод дифференциальной прогонки.

Численные методы решения задач для уравнений в частных производных

1. Общие вопросы теории разностных схем. Аппроксимация, устойчивость, сходимость.
2. Гиперболические уравнения. Разностные схемы для уравнения переноса. Схемы бегущего счета.
3. Параболические уравнения. Явные и неявные разностные схемы для уравнения теплопроводности.
4. Разностная схема Кранка-Николсон для уравнения теплопроводности.
5. Разностные схемы для уравнения колебаний струны.
6. Экономичные разностные схемы для многомерных нестационарных задач. Метод переменных направлений.
7. Разностная схема для задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
8. Метод Галеркина.
9. Метод конечных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматкнига. 2007 г.
2. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Лань. 2009 г.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. М.: Дрофа. 2003 г.
4. Никольский С.Н. Курс математического анализа. М.: Физматлит. 2001 г.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит. 2002 г.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Юрайт. 2012 г.
7. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит. 2000 г.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001 г.
9. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит. 2009 г.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 2004 г.

11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1983 г.
12. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматлит. 2009 г.
13. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1990 г.
15. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2011 г.
16. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Лань. 2009 г.
17. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука. 1977 г.
18. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978.
19. Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БХВ Петербург. 2011 г.
20. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир. 2003 г.

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА
программы вступительного испытания по специальной дисциплине
«Математика и механика» по научной специальности
1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

Механика и термодинамика сплошных сред

1. Понятие сплошной среды. Кинематика сплошной среды в переменных Эйлера и Лагранжа. Переход от координат Эйлера к координатам Лагранжа и обратно.
2. Деформация сплошной среды. Тензоры деформации Коши-Грина и Альманси, геометрический смысл компонент этих тензоров. Малые деформации и малые вращения среды. Условия совместности деформаций, формулы Чезаро.
3. Типы сил в механике сплошной среды: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Теория напряженного состояния, тензоры напряжений Коши и Пиолы-Кирхгофа. Геометрическая интерпретация напряженного состояния: круги Мора. Простейшие виды напряженных состояний.
4. Интегральная и дифференциальная форма законов сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии.
5. Термодинамика сплошной среды. Работа, количество тепла, внутренняя энергия, температура и энтропия термодинамической системы. Первый и второй законы термодинамики.

Теория упругости

1. Упругая деформация твердых тел. Упругий потенциал и энергия деформации. Линейно упругое тело Гука. Понятие об анизотропии упругого тела. Закон Гука для изотропного и анизотропного твердого тела. Тензор упругих модулей. Упругие модули изотропного тела, их механический смысл.
2. Полная система уравнений теории упругости. Уравнения Ламе в перемещениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла в напряжениях. Постановка краевых задач математической теории упругости. Теорема существования и единственности решения. Принцип Сен-Венана.
3. Общие теоремы теории упругости и вариационные принципы. Теорема Клапейрона. Теорема Бетти. Теорема о минимуме потенциальной энергии деформаций (вариационный принцип Лагранжа). Теорема о минимуме дополнительной энергии (вариационный принцип Кастильяно).
4. Методы решения пространственных задач эластостатики. Действие сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде. Тензор фундаментальных решений Грина. Задача Буссинеска.

5. Двумерные задачи эластостатики. Плоская деформация. Обобщенное плоское напряженное состояние. Функции напряжений Эри, краевая задача для функции напряжений. Метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили. Примеры решений.
6. Теория тонких упругих пластин и оболочек. Основные гипотезы. Деформация срединной поверхности. Внутренние усилия и моменты. Граничные условия. Постановка задач теории пластин и оболочек. Безмоментная теория.
7. Температурные задачи теории упругости. Закон Дюамеля-Неймана. Система основных уравнений термоупругости. Методы решения задач термоупругости.
8. Динамические задачи теории упругости. Уравнения движения в форме Ламе. Типы упругих волн в неограниченной изотропной среде. Плоские гармонические волны. Коэффициенты отражения и прохождения. Поверхностные волны Рэлея. Волны Лява. Волны в упругом стержне. Собственные частоты упругих тел. Формула Рэлея.

Теория пластичности

1. Пластическое деформирование твердых тел. Предел текучести. Остаточные деформации. Идеальная пластичность. Физические механизмы пластичности. Дислокации. Локализация пластических деформаций. Линии Людерса-Чернова.
2. Модели идеального упругопластического и жесткопластического тела. Критерий текучести и поверхность текучести в пространстве напряжений. Критерий Треска, критерий Мизеса. Геометрическая интерпретация условий текучести в пространстве главных напряжений.
3. Модели упрочняющегося упругопластического и жесткопластического тела. Параметр упрочнения и поверхность нагружения.
4. Теория пластического течения. Принцип Мизеса, постулат Друккера. Ассоциированный закон течения. Краевые задачи теории течения.
5. Теория предельного равновесия. Статическая и кинематическая теоремы теории предельного равновесия. Верхние и нижние оценки. Примеры.
6. Кручение призматического тела за пределом упругости. Предельное состояние при кручении. Поверхность напряжений как поверхность естественного ската. Аналогия Прандтля-Надаи.
7. Пластическое плоское деформированное состояние. Уравнения для напряжений и скоростей. Характеристики. Свойства линий скольжения. Задача Прандтля о вдавливании штампа.
8. Деформационная теория пластичности Генки-Ильюшина. Метод упругих решений. Задача о толстостенной трубе под действием внутреннего давления.
9. Упругопластические волны в стержне. Ударное нагружение. Волна разгрузки. Остаточные деформации.

Теория вязкоупругости и ползучести

1. Понятие о ползучести и релаксации. Кривые ползучести и релаксации. Простейшие модели линейно вязкоупругих сред: модель Максвелла, модель Кельвина-Фойхта. Время релаксации.
2. Определяющие соотношения теории вязкоупругости. Ядра ползучести и релаксации.
3. Формулировка краевых задач теории вязкоупругости. Методы решения краевых задач теории вязкоупругости: принцип соответствия Вольтерра, применение интегрального преобразования Лапласа.
4. Теории старения, течения, упрочнения и наследственности. Ползучесть при сложном напряженном состоянии. Определяющие соотношения.

Механика разрушения

1. Понятие о разрушении и прочности тел. Общие закономерности и основные типы разрушения. Концентраторы напряжений. Критерии разрушения. Критерии длительной и усталостной прочности. Коэффициент запаса.
2. Скорость высвобождения энергии при продвижении трещины в упругом теле. Энергетический подход Гриффитса. Силовой подход в механике разрушения. Эквивалентность подходов в случае хрупкого разрушения. Формула Ирвина.
3. Двумерные задачи о трещинах в упругом теле. Коэффициенты интенсивности напряжений, методы их вычисления и оценки.
4. J-интеграл Эшелби-Черепанова-Райса и его инвариантность. Вычисление потока энергии в вершину трещины.
5. Локализованное пластическое течение у вершины трещины. Модель трещины Леонова-Панасюка-Дагдейла с узкой зоной локализации пластических деформаций.

Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела

1. Метод конечных разностей. Типичные разностные схемы для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений. Метод конечных разностей для дифференциальных уравнений теории упругости.
2. Вариационный принцип минимума полной потенциальной энергии упругого тела. Методы Рэлея-Ритца и Бубнова-Галеркина в задачах минимизации функционала полной потенциальной энергии.
3. Метод конечных элементов в теории упругости. Пределы применимости метода конечных элементов.
4. Формула Соммильяны и метод граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов).
5. Метод характеристик в двумерных задачах теории пластичности. Область влияния и область зависимости решения гиперболической краевой задачи.

6. Понятие о вычислительном эксперименте. Использование вычислительного эксперимента для решения задач механики деформируемого твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001.
2. Бажанов В. Л. Механика деформируемого твердого тела. Изд-во «Юрайт», 2023.
3. Богульский И. О. Элементы теории упругости, пластичности и наследственной механики. Красноярск: СФУ, 2011.
4. Бураго Н. Г. Вычислительная механика. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007.
5. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
6. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
7. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.
8. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004.
9. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. М.: Физматлит, 2002.
10. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
11. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001.
12. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002.
13. Ильин В. П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2007.
14. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990.
15. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003.
16. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
17. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979.

18. Ковеня В. М. Разностные методы решения многомерных задач. Новосибирск: НГУ, 2004.
19. Ковеня В. М., Чирков Д. В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Новосибирск: НГУ, 2013.
20. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
21. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
22. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
23. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Изд-во «Юрайт», 2026.
24. Механика сплошных сред в задачах (под ред. М. Э. Эглит). Т. 1: Теория и задачи. Т. 2: Ответы и решения. М.: «Московский Лицей», 1996.
25. Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1997.
26. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
27. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
28. Наседкин А. В. Теория и технология МКЭ: курс лекций. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2013.
29. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
30. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
31. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987.
32. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
33. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
34. Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.
35. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Физматлит, 1997.
36. Садовский В. М. Методы решения вариационных задач механики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1998.
37. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

38. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. М.: Наука, 1997.
39. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. СПб.: Изд-во «Лань», 2004.
40. Селиванов В. В. Прикладная механика сплошных сред. Т. 1: Основы механики сплошных сред. Т. 2: Механика разрушения деформируемого тела. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021.
41. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979.
42. Трусов П. В., Швейкин А. И. Теория пластичности. Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2011.
43. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА
программы вступительного испытания по специальной дисциплине
«Математика и механика» по научной специальности
1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

Общие сведения из математики

1. Теория систем линейных алгебраических уравнений. Линейные операторы в n -мерном пространстве, собственные числа и собственные векторы линейного оператора.
2. Многочлены. Делимость многочленов (алгоритм деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неразложимые множители. Корни и значения (теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен). Формула Виета и основная теорема о симметрических многочленах. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
3. Квадратичные формы. Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Приведение квадратичной формы методом выделения полных квадратов. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Положительно определенные формы, критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к главным осям.
4. Линии и поверхности второго порядка. Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания. Линия второго порядка (фокусы, асимптоты, оптические свойства). Поверхность второго порядка, алгоритм отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной уравнением второго порядка. Метод Лагранжа для определения аффинного типа поверхности 2-го порядка. Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль. Кручение кривой. Теорема о задании кривой натуральными уравнениями.
5. Основные теоремы дифференциального исчисления. Теорема о средних значениях, о неявной функции, формула Тейлора, ряд Фурье. Дифференциальные операторы: градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа.
6. Основные теоремы интегрального исчисления. Теорема о замене переменных, о повторных интегралах (теорема Фубини). Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Остроградского, Стокса.
7. Конечномерные вещественные пространства. Открытые, замкнутые, компактные множества. Основные нормированные пространства. Полнота, сепарабельность, сильная и слабая сходимости. Гильбертовы пространства, теорема Рисса – Фишера.

8. Элементы теории линейных операторов. Теорема Хана – Банаха. Теорема Фредгольма для вполне непрерывных операторов. Теорема Рисса о линейном функционале. Теорема о неподвижной точке.
9. Функции комплексного переменного. Производная и дифференциал функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Простейшие конформные отображения. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей.
10. Ряды Тейлора и Лорана. Аналитическая функция. Изолированные особые точки аналитической функции. Элементы теории вычетов.
11. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и нормальной системы. Зависимость решения от начальных условий и параметров.
12. Построение общего решения линейных систем ОДУ. Неоднородные системы. Метод вариации постоянных.
13. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Понятие о краевых задачах для уравнений второго порядка. Собственные числа и функции. Функция Грина.
14. Уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическое уравнение и построение общего решения.
15. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Характеристики линейных уравнений с двумя независимыми переменными. Примеры разных типов уравнений из механики и физики.

Общие сведения из теоретической механики и механики сплошной среды

1. Уравнения движения системы материальных точек. Внутренние и внешние силы. Теоремы об изменении импульса, момента количества движения, кинетической энергии. Работа внешних и внутренних сил.
2. Относительное движение, формулы сложения скоростей и ускорений. Ускорение Кориолиса. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, Распределение скоростей и ускорений при произвольном движении абсолютно твердого тела.
3. Понятие сплошной среды. Микроскопические, статистические и макроскопические феноменологические методы описания свойств, взаимодействий и движений материальных сред.
4. Системы отсчета и системы координат. Лагранжевы и эйлеровы координаты. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета в ньютоновской механике. Подходы Эйлера и Лагранжа при изучении движения сплошных сред.
5. Определения и свойства кинематических характеристик движения: перемещения, траектории, скорость, линии тока, критические точки, ускорение, тензор скоростей деформации и его инварианты, вектор вихря,

потенциал скорости, циркуляция скорости, установившееся и неустановившееся движение среды. Кинематические свойства вихрей.

Основные понятия и уравнения динамики и термодинамики

1. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера и Лагранжа. Условие несжимаемости. Многокомпонентные смеси. Потoki диффузии. Уравнения неразрывности в форме Эйлера для многокомпонентных смесей.
2. Массовые и поверхностные, внутренние и внешние силы. Законы сохранения количества движения и моментов количества движения для конечных масс сплошной среды. Дифференциальные уравнения движения и момента количества движения сплошной среды.
3. Работа внутренних поверхностных сил. Кинетическая энергия и уравнение энергии для сплошной среды в интегральной и дифференциальной формах.
4. Понятие о параметрах состояния, пространстве состояний, процессах и циклах. Закон сохранения энергии, внутренняя энергия. Уравнение притока тепла. Вектор потока тепла. Дифференциальные уравнения энергии и притока тепла. Законы теплопроводности Фурье. Различные частные процессы: адиабатический, изотермический и др.
5. Обратимые и необратимые процессы. Совершенный газ. Цикл Карно. Второй закон термодинамики. Энтропия и абсолютная температура. Некомпенсированное тепло и производство энтропии. Неравенство диссипации, тождество Гиббса. Диссипативная функция. Основные макроскопические механизмы диссипации. Понятие о принципе Онзагера. Уравнения состояния. Термодинамические потенциалы двухпараметрических сред.

Классические модели жидких и газообразных сред

1. Модель идеальной жидкости. Уравнения Эйлера. Полные системы уравнений для идеальной, несжимаемой и сжимаемой жидкостей. Начальные и граничные условия.
2. Интегралы Бернулли и Коши – Лагранжа. Явление кавитации.
3. Теорема Томсона и динамические теоремы о вихрях. Возникновение вихрей. Теорема Бьеркнеса.
4. Модель вязкой жидкости. Линейно-вязкая (ньютоновская) жидкость. Уравнения Навье – Стокса. Полные системы уравнений для вязкой несжимаемой и сжимаемой жидкостей. Начальные и граничные условия. Диссипация энергии в вязкой теплопроводной жидкости.
5. Поверхности слабых и сильных разрывов. Разрывы сплошности. Условия на поверхностях сильного разрыва в материальных средах. Тангенциальные разрывы и ударные волны.

Гидростатика

1. Равновесие жидкости и газа в поле потенциальных массовых сил. Закон Архимеда. Равновесие и устойчивость плавающих тел и атмосферы.

Движение идеальной несжимаемой жидкости

1. Общая теория непрерывных потенциальных движений несжимаемой жидкости. Свойства гармонических функций. Многозначность потенциала в многосвязных областях. Кинематическая задача о произвольном движении твердого тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Энергия, количество движения и момент количества движения жидкости при движении в ней твердого тела. Движение сферы в идеальной жидкости.
2. Силы воздействия идеальной жидкости на тело, движущееся в безграничной массе жидкости. Основы теории присоединенных масс. Парадокс Даламбера.
3. Плоские движения идеальной жидкости. Функция тока. Применение методов теории аналитических функций комплексного переменного для решения плоских задач гидродинамики и аэродинамики. Стационарное обтекание жидкостью цилиндра и профиля. Формулы Чаплыгина и теорема Жуковского. Правило Жуковского и Чаплыгина определения циркуляции вокруг крыльев с острой задней кромкой. Нестационарное обтекание профилей.
4. Плоские задачи о струйных течениях жидкости. Обтекание тел с отрывом струй.
5. Определение поля скоростей по заданным вихрям и источникам. Формулы Био – Савара. Прямолинейный и кольцевой вихри. Законы распределения давлений, силы, обуславливающие вынужденное движение прямолинейных вихрей в плоском потоке.
6. Постановка задачи Коши – Пуассона о волнах на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости. Гармонические волны. Фазовая и групповая скорость. Дисперсия волн. Перенос энергии прогрессивными волнами. Теория мелкой воды. Уравнения Кортевега – де Фриза и Буссинеска. Нелинейные волны. Солитон.

Движение вязкой жидкости. Теория пограничного слоя. Турбулентность

1. Ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости. Течения Куэтта и Пуазейля. Течение вязкой жидкости в диффузоре. Диффузия вихря. Приближения Стокса и Озеена. Задача о движении сферы в вязкой жидкости в постановке Стокса.
2. Ламинарный пограничный слой. Задача Блазиуса. Интегральные соотношения и основанные на их использовании приближенные методы в теории ламинарного пограничного слоя. Явление отрыва пограничного слоя. Устойчивость пограничного слоя. Теплообмен с потоком на основе теории пограничного слоя.

3. Турбулентность. Опыт Рейнольдса. Уравнения Рейнольдса. Турбулентный перенос тепла и вещества. Полуэмпирические теории турбулентности. Профиль скорости в пограничном слое. Логарифмический закон. Прямое численное решение уравнений гидромеханики при наличии турбулентности.
4. Свободная и вынужденная конвекция. Приближение Буссинеска. Линейная неустойчивость подогреваемого плоского слоя и порог возникновения конвекции. Странный аттрактор.
5. Движение жидкости и газа в пористой среде. Закон Дарси.

Движение сжимаемой среды. Газовая динамика

1. Распространение малых возмущений в сжимаемой жидкости. Волновое уравнение. Скорость звука.
2. Запаздывающие потенциалы. Эффект Допплера. Конус Маха. Уравнения газовой динамики. Характеристики.
3. Влияние сжимаемости на форму трубок тока при установившемся движении. Элементарная теория сопла Лавалья.
4. Одномерные неустановившиеся движения газов с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами.
5. Волны Римана. Эффект опрокидывания волн. Адиабата Гюгонио. Теорема Цемплена. Эволюционные и неэволюционные разрывы.
6. Теория волн детонации и горения. Правило Жуге и его обоснование. Задача о структуре сильного разрыва.
7. Качественное описание решения задачи о распаде произвольного разрыва.
8. Плоские стационарные сверхзвуковые течения газа. Метод характеристик. Течение Прандтля – Майера. Косой скачок уплотнения.

Конвективная диффузия в жидкостях

1. Общие сведения о диффузионной кинетике в жидкостях. Теория Нернста. Теория Лангмюра. Уравнение конвективной диффузии в жидкостях. Граничные условия. Диффузионный пограничный слой. Сведение уравнения диффузии к уравнению типа уравнения теплопроводности. Диффузия к падающей твердой частице. Аналогия между диффузией и поверхностным трением. Моделирование гетерогенных химических реакций. Диффузионный критерий Нуссельта. Диффузия в ламинарном потоке жидкости в трубе.

Капиллярное движение

1. Поверхностный слой. Условие равновесие между двумя жидкими фазами. Капиллярное движение. Граничные условия на поверхности раздела двух жидкостей. Движение жидкости в капилляре. Термокапиллярное движение. Влияние поверхностно-активных веществ на движение жидкости.

Электромагнитные явления в жидкостях

1. Уравнения Максвелла в пустоте. Взаимодействие электромагнитного поля с проводниками. Сила Лоренца. Закон сохранения полного заряда. Закон Ома. Среды с идеальной проводимостью. Вектор и уравнение Умова – Пойнтинга. Джоулево тепло. Уравнения импульса и притока тепла для проводящей среды. Уравнения магнитной гидродинамики. Условия вмороженности магнитного поля в среду. Понятие о поляризации и намагничивании жидкостей.

Физическое подобие, моделирование

1. Система определяющих параметров для выделенного класса явлений. Основные и производные единицы измерения. Формула размерностей. Определение физического подобия. Моделирование. Критерии подобия. Числа Эйлера, Маха, Фруда, Рейнольдса, Прандтля, Грасгофа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : МГУ, 2009.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 2004.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2009.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. СПб. : Лань, 2004.
5. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М. : Наука, 1984.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I, II. М. : Физматгиз, 1963.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I, II. 5-е изд. М. : Наука, 1994.
8. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 10-е изд. М. : Наука, 1987.
9. Маслов А. А., Миронов С. Г. Динамика вязкого газа, турбулентность и струи. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 3-е изд. М. : Наука, 1986.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. 5-е изд. М. : Наука, 1978.
12. Черный Г. Г. Газовая динамика. М. : Наука, 1988.
13. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. : Гос. изд-во физ.-тех. лит-ры, 1955.

14. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. РХД, 2000.
15. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. : Наука, 1974.
16. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1972.
17. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М. : Мир, 1977.